第21卷 增刊
1998年8月
计 算 机 学 报
CHINESE J. COMPUTERS
Vol. 21 Suppl.
Aug. 1998

局部搜索多初始点选择的划分策略的性能分析

贺思敏[1,2] 卢旭光[3] 张 钹[1,2]

[1](清华大学计算机科学与技术系 北京 100084)

[2](清华大学智能技术与系统国家重点实验室 北京 100084)

[3](清华大学应用数学系 北京 100084)

摘 要 本文对Wong和Morris提出的一种基于划分搜索空间的局部搜索多初始点选择的新策略——划分策略进行了严格的理论分析.文中定义了划分类的均匀性偏序关系,定义了划分类的平均划分性能和最坏划分性能两个性能标准,证明了对于任一个实例,划分类越均匀,相应的初始点策略性能就越好,给出了作为最优划分策略的均分策略的性能上下界,完整彻底地解决了对划分策略的评价问题.

关键词 组合问题,算法分析,局部搜索,初始点策略.

分类号: TP18

PERFORMANCE EVALUATION OF PARTITION-BASED INITIAL POINT STRATEGY IN LOCAL SEARCH

HE Si-Min[1,2] LU Xu-Guang[3] ZHANG Bo[1,2]

[1](*Department of Computer Science and Technology*, *Tsinghua University*, *Beijing* 100084)

[2](*National Key Laboratory for Intelligent Technology and Systems*, *Tsinghua University*, *Beijing* 100084)

[3](*Department of Applied Mathematics*, *Tsinghua University*, *Beijing* 100084)

Abstract This paper gives a thorough theoretical analysis of a new approach to choosing multiple initial points in local search, namely, the partition-based strategy proposed by Wong and Morris in 1989. First, a partial order in partition types and two performance measures of the partition-based initial point strategy, i. e. , the expected and the worst performance of a partition type, are defined. Second, it is proved that on any instance, the more uniform the partition type, the better the performance of the corresponding initial point strategy. Third, the lower and upper bounds to the performance of initial point strategy based on the even partition type, the best of the kind, are given. It is concluded that the partition-based strategy is not a promising approach to choosing multiple initial points in local search.

Keywords Combinatorial problem, algorithm analysis, local search, initial point strategy.

1 简 介

局部搜索(Localsearch)是一种求解组合优化问题的通用和实用的启发式方法.早在70年代,Lin和

本文1996-01-16收到,修改文1998-05-04收到.本课题得到国家自然科学基金、国家攀登计划和国家863高科技基金资助.**贺思敏**,男,1968年生,获博士学位,主要研究领域为组合优化问题、局部搜索算法的实验设计与分析.**卢旭光**,男,1955年生,获博士学位,副教授,主要研究领域为数学物理方程、计算数学.**张 钹**,男,1935年生,中国科学院院士,教授,博士生导师,主要研究领域为问题求解、人工神经网络等人工智能基础理论.

Kernighan 用局部搜索技术近似求解旅行商问题(Traveling salesman problem)[1]和图划分问题(Graph partitioning problem)[2]取得了成功,引起了研究者对局部搜索技术的广泛关注[3]. 90 年代,Selman[4]、顾钧(J. Gu)[5]、黄文奇[6]等多位学者用局部搜索技术求解可满足性问题(Satisfiability problem)取得了引人注目的实验成果. 近些年来比较流行的模拟退火(Simulated annealing)、禁忌搜索(Tabu search)、遗传算法(Genetic algorithm)[7]等启发式方法均可看成是局部搜索方法的进一步发展. 此外,局部搜索技术与连续问题最优化方法也有深刻的联系. 局部搜索在方法上的一般性和应用上的有效性促进了人们对它进行深入研究,邻域设计、多初始点选择、邻域搜索方式、停止策略以及有关的复杂性分析均成为研究中的重要内容[3,8].

由于局部搜索方法在理论和应用上的重要性,对此技术所做的任何通用改进都是非常有意义的. 其中,关于多初始点的选择,常用策略是均匀随机策略,即从搜索空间中按均匀分布独立重复选取多个初始点. 1989 年,贝尔实验室的 Wong 和 Morris 提出了一种基于划分搜索空间的选择多初始点的新策略——划分策略,证明了使用同样数目的初始点,在任一个实例下,任给搜索空间的一个划分,基于此划分的划分策略的性能优于基于同一划分的随机初始点策略(Random initial point strategy,一种由 Wong 和 Morris 定义的基于划分搜索空间的非均匀随机取样策略)[9]. 1991 年,Morris 和 Wong 又将此方法和相应结果推广至连续优化问题并允许邻域搜索带有随机性[10].

但是,文献[9]中的随机初始点策略只有在划分是均匀划分时才等价于常用策略. 因此从文献[9]仅能推出基于均匀划分的划分策略即均分策略优于常用策略. 这就自然引出如何评价非均匀划分策略以及什么是最好的划分策略的问题. 文献[9]把这个问题作为遗留问题提出来而没有解决. 此外,划分策略如果比常用策略有优势,那么这种优势有多大? 划分策略的实质是什么? 对此文献[9]没有给出理论分析.

本文对以上问题做了解答,从而对划分策略的性能做出了完整的评价. 我们在第 2 节定义了划分类的均匀性偏序关系,定义了与划分策略有关的各种多初始点选择策略,以及必要的概念和符号约定;在第 3 节定义了划分类的平均划分性能和最坏划分性能两个性能判据,证明了划分类越均匀,相应策略的性能就越好,不仅证明了均分策略是最优的划分策略,而且对不同的非均分策略的性能也进行了比较,彻底解决了文献[9]提出的遗留问题;在第 4 节给出了划分策略的性能上界,给出了作为最优划分策略的均分策略的性能上下界,从而可以准确估计均分策略比常用策略性能提高的界限;最后,在第 5 节总结了全文工作和观点.

2 概念和符号

本节介绍必要的概念和约定,并尽可能采用与文献[9]一致的术语和符号以便于比较. 由于篇幅所限,本文所有定理的证明不在文中给出,请参见文献[11].

2.1 集合的划分、划分类及均匀性偏序关系

集合 S 的子集族 $P=\{S_1,S_2,\cdots,S_m\}$ 若满足 $\forall\ 1\le i\ne j\le m, S_i\subseteq S, S_i\ne\phi, S_i\cap S_j=\phi, \bigcup_{i=1}^{m}S_i=S$,则称 P 为 S 的一个 m 划分,S_i 称为 P 的一个划分块.

有限集合 S 的一个 m 划分 P,若其中大小为 k_i 的划分块分别有 α_i 个,满足 $\forall\ 1\le i\ne j\le t, k_i,\alpha_i\in N, k_i\ne k_j$, $\sum_{i=1}^{t}\alpha_i=m$, $\sum_{i=1}^{t}k_i\alpha_i=|S|$,则称划分 P 的类型为 $T=k_1^{\alpha_1}k_2^{\alpha_2}\cdots k_t^{\alpha_t}$. 类型 T 同时也表示所有类型为 T 的 S 的划分的集合,称作 S 的一个划分类.

设 T 是 S 的一个 m 划分类,T 中任一划分的划分块大小分别为 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,若 $\exists\ i,j, 1\le i\ne j\le m, k_i\le k_j-2$ 则令 $k_i'=k_i+1, k_j'=k_j-1$;$\forall\ 1\le l\le m, l\ne i,j$,令 $k_l'=k_l$. 设划分块大小分别为 $k_1',k_2',\cdots,k_m'$的划分所在的划分类为 T',我们定义划分类 T 的均匀性小于划分类 T' 的均匀性,记作 $T<T'$. 将 S 的 m 划分类间这个均匀性关系"$<$"扩充为它的自反传递闭包,记为"$\le$". 易证"$\le$"构成 S 的 m 划分类间关于均匀性的一个偏序关系. 从定义过程不难看出这个偏序关系的定义与我们对划分类均匀性关系的直观认识是一致的.

引理 1. 给定有限集合 S,$|S|=s$,给定划分数 $m\in N, 2\le m\le s$,设 $s=qm+r, 0\le r<m$. 在如上定义的 S 的 m 划分类间的均匀性偏序关系"$\le$"下,存在最大元. 当 $r=0$ 时,最大元为 q^m;当 $0<r<m$ 时,最大

元为 $q^{m-r}(q+1)^r$.

当 $|S|=qm$ 时，我们称划分类 q^m 及其中的任一个划分为均分．由于 $|S|$ 不一定可被 m 除尽，因此 S 的 m 划分类中最大元不一定能达到均分．

2.2　几种多初始点选择策略

不失一般性，我们以最小化问题作为研究对象．给定一个最小化问题的实例 (S,f)，其中 S 是离散、有限的可行点集即搜索空间，$f:S\to\mathbf{R}$ 是目标函数，我们要求 f 在 S 上的最小值．

给定一个邻域搜索算法 A，本文要求 A 是确定性的，即从同一实例的同一初始点出发所经过的路径是唯一的，此外对 A 没有任何其它限制．给定一个初始点选择策略 I，按照 I 从 S 中选择 n 个点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$（可能有重复）作为初始点，设从 x_i 出发经算法 A 所给出的局部最小值为 $A(x_i)$，则称 $B_n^I=\min\{A(x_i),1\le i\le n\}$ 为策略 I 下 n 个初始点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 经算法 A 局部搜索求出的实例 (S,f) 的解．一般地讲，B_n^I 只是近似最小值；当初始点选择策略 I 带有随机性时，B_n^I 也带有随机性，只能以一定概率达到精确最小值．而比较不同初始点选择策略的性能，就是比较它们在其它条件相同时，相应的 B_n^I 达到精确最小值的概率，或者更进一步，比较相应的 B_n^I 的概率分布．为此，我们要用到一个"吸引域"的概念，定义为 $D(r)=\{x\in S\,|\,A(x)>r\}$，其中 $r\in\mathbf{R}$．以上约定均与文献[9]一致．

下面介绍几种初始点选择策略．设初始点个数为 n，划分数为 m，为方便说明与计算，不失一般性，假设 $n=km,k\ge 1$：

· 均匀随机初始点选择策略 R_0

对 S 进行 n 次有放回的均匀独立取样，得 n 个初始点，相对应的解记为 $B_n^{R_0}$．这是我们所说的常用策略．

· 基于划分 $P=\{S_1,S_2,\cdots,S_m\}$ 的初始点选择策略 P

在 S_i 中均匀随机选择 k 个点，组成 $mk=n$ 个初始点，相对应的解记为 B_n^P．这是文献[9]提出的新策略——划分策略．

· 基于划分 $P=\{S_1,S_2,\cdots,S_m\}$ 的非均匀随机初始点选择策略 RP

以 $1/m$ 的概率选中 $\{S_1,S_2,\cdots,S_m\}$ 中的一个划分块 S_i，再从 S_i 中均匀随机取一点，独立重复此过程 n 次得到 n 个初始点，相对应的解记为 B_n^{RP}．文献[9]称此策略为"Random initial point strategy"，与 R_0 策略是不同的．

· 基于随机选择划分类 T 中划分的初始点选择策略 T

在 T 中随机选择一个元素 P，再以基于划分 P 的初始点选择策略选 n 个初始点，相对应的解记为 B_n^T．

· 均匀随机无放回取样策略 $R(m,k)$

从 S 中均匀无放回取样 m 个点，独立重复此过程 k 次，得 $mk=n$ 个初始点，相对应的解记为 $B_n^{R(m,k)}$．

文献[9]的成果是证明了任意实例下，任给一个划分 P，有 $\boldsymbol{Pr}(B_n^P\le r)\ge \boldsymbol{Pr}(B_n^{RP}\le r),\forall\, r\in\mathbf{R}$．但是常用策略是 R_0 而不是 RP．因此本文将着重比较 P 策略与 $R_0,T,R(m,k)$ 等策略的关系，以深入理解划分策略的性能和实质．

对于与 m 划分有关的策略，我们称 $n=m$ 时的多初始点搜索求解为基于相应策略的一遍试验．同时为了便于比较，也称 $n=m$ 时基于其它策略的多初始点搜索求解为一遍试验．$n=km$ 时相应称为 k 遍试验．这也同文献[9]一致．

3　不同划分策略的性能比较

上节我们定义了 m 划分类的均匀性偏序关系，本节我们讨论划分类的均匀性与相应的划分策略的性能之间的关系．这要求我们首先明确以什么样的标准来度量和比较性能．

我们不采用比较两个具体划分的性能的方法，因为任一个划分均可以找到对其极为有利的实例，也可以找到对其极为不利的实例，从而这种比较方法无法获得稳定一致的结论和明确的认识．我们也不采用比较具体划分对所有实例的平均性能或对最坏实例的性能的方法，因为这要求对实例分布、具体的邻域搜索算法决定的吸引域 $D(r)$ 的特点等有更多的了解或假设，这样得出的结论相对比较弱．

我们的方法是比较任一实例下整个划分类的性能，具体地讲，有两个性能标准：一个是划分类中全体划分的平均性能即策略 T 的性能，另一个是划分类中最坏划分的性能．一般地讲，我们并不知道划分类中哪个划分最适合当前实例，选择划分时具有盲目性或随机性，因此从这个角度讲我们比较随机选择划分下的期望性能即划分类中全体划分的平均性能是合理的．这是我们定义第一种性能标准的理由之一．另一个理由请参见定理1后面的讨论．第二种标准是为了衡量划分类的最大风险．这两个标准不仅可以获得稳定一致的结论，而且与实例分布、搜索方法等完全无关．

定理1.　任给一个最小化问题的实例 (S,f)，$|S|=s$，任给确定性的邻域搜索算法 A，任给划分数 $m\in \boldsymbol{N}$，$2\le m\le s$，任给试验遍数 $k\in \boldsymbol{N}$，任给性能指标 $r\in \boldsymbol{R}$，设 $|D(r)|=d$．设 T 是 S 的任一个 m 划分类，$P=\{S_1^0, S_2^0,\cdots,S_m^0\}$ 是 T 中任一个确定的划分，$|S_i^0|=s_i$，$1\le i\le m$．则有：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Pr}(B_{mk}^T\le r)&=1-\sum_{\{S_1,S_2,\cdots,S_m\}\in T}\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{|D(r)\cap S_i|}{|S_i|}\right)^k\Big/|T|\\&=1-\sum_{D\subseteq S,|D|=d}\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{|D\cap S_i^0|}{|S_i^0|}\right)^k\Big/\binom{s}{d}\\&=1-\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_m,\ \sum\limits_{1\le j\le m}i_j=d}\left(\prod_{j=1}^{m}\binom{s_j}{i_j}\right)\left(\prod_{j=1}^{m}\frac{i_j}{s_j}\right)^k\Big/\binom{s}{d}\end{aligned}$$

定理1实质上是一个非常一般的公式，在本文具体背景下又有非常特殊的含义．如果假设"若某一实例在 r 下的吸引域 $|D(r)|=d$，则任一大小为 d 的 S 的子集均是某一实例在 r 下的吸引域，且这样的实例分布均匀"成立，那么定理1表明基于随机选择划分类中划分的初始点选择策略 T 的算法性能等于基于划分类中任一划分的初始点选择策略 P 的算法对于不同实例的平均性能．但是我们可以保证选择划分的随机性，即策略 T 是可以实现的，却无法保证实例按假设分布．这揭示了随机性算法的性能与确定性算法对实例平均的性能之间的联系与区别．定理1也进一步说明我们选择划分类中全体划分的平均性能作为比较标准的合理性，即在保证可实现性而不依赖于假设的同时，在一定意义下也对具体划分的平均性能做出了比较．

推论1.　就一遍试验而言，任一 m 划分类的平均划分性能均等于 $R(m,1)$ 策略的性能．即 $\forall\ (S,f)$，$|S|=s$，$\forall\ A$，$\forall\ m\in \boldsymbol{N}$，$2\le m\le s$，$\forall\ r\in \boldsymbol{R}$，$|D(r)|=d$，$\forall\ m$ 划分类 T，

$$\boldsymbol{Pr}(B_m^T\le r)=\boldsymbol{Pr}(B_m^{R(m,1)}\le r)=1-\binom{d}{m}\Big/\binom{s}{m}$$

推论1提示我们，划分策略与均匀随机策略 R_0 相比，实质上是企图避免 R_0 策略中初始点可能的重复．

引理2.　$\forall\ s_1,s_2\in \boldsymbol{N}$，$s_1\le s_2-2$，$\forall\ d\in \boldsymbol{Z}$，$0\le d\le s_1+s_2$，$\forall\ k\in \boldsymbol{Z}$，$k\ge 0$，有

$$\sum_{i=0}^{d}\binom{s_1}{i}\binom{s_2}{d-i}\left(\frac{i}{s_1}\cdot\frac{d-i}{s_2}\right)^k\ge\sum_{i=0}^{d}\binom{s_1+1}{i}\binom{s_2-1}{d-i}\left(\frac{i}{s_1+1}\cdot\frac{d-i}{s_2-1}\right)^k$$

定理2.　$\forall\ (S,f)$，$|S|=s$，$\forall\ A$，$\forall\ m\in \boldsymbol{N}$，$2\le m\le s$，$\forall\ k\in \boldsymbol{N}$，$T$ 是 S 的一个 m 划分类，其中任一划分的划分块大小分别为 $s_1,s_2,\cdots,s_m$，且满足 $s_1\le s_2-2$．令 $s_1'=s_1+1$，$s_2'=s_2-1$，$s_i'=s_i$，$3\le i\le m$，设划分块大小分别为 $s_1',s_2',\cdots,s_m'$ 的划分所在划分类为 T'，则有 $\forall\ r\in \boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{Pr}(B_{mk}^T\le r)\le \boldsymbol{Pr}(B_{mk}^{T'}\le r)$．

定理2结合上节关于划分类均匀性的偏序关系定义可得下面推论．

推论2.　划分类越均匀，划分类的平均划分性能越好．即 $\forall\ (S,f)$，$|S|=s$，$\forall\ A$，$\forall\ m\in \boldsymbol{N}$，$2\le m\le s$，$\forall\ k\in \boldsymbol{N}$，$\forall\ m$ 划分类 T_1,T_2，若 $T_1\le T_2$，则 $\forall\ r\in \boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{Pr}(B_{mk}^{T_1}\le r)\le \boldsymbol{Pr}(B_{mk}^{T_2}\le r)$．

以上我们比较了不同划分类在平均划分性能标准下的性能．下面讨论最坏划分性能标准下划分类的性能与其均匀性的关系．

定理3.　$\forall\ (S,f)$，$|S|=s$，$\forall\ A$，$\forall\ m\in \boldsymbol{N}$，$2\le m\le s$，$\forall\ k\in \boldsymbol{N}$，设 T 是 S 的一个 m 划分类，其中任一划分的划分块大小分别为 $s_1,s_2,\cdots,s_m$，且满足 $s_1\le s_2-2$．令 $s_1'=s_1+1$，$s_2'=s_2-1$，$s_i'=s_i$，$3\le i\le m$，设划分块大小分别为 $s_1',s_2',\cdots,s_m'$ 的划分所在划分类为 T'，则有 $\forall\ r\in \boldsymbol{R}$，$\min\limits_{P\in T}\boldsymbol{Pr}(B_{mk}^P\le r)\le \min\limits_{P\in T'}\boldsymbol{Pr}(B_{mk}^P\le r)$．

推论3.　划分类越均匀，划分类的最坏划分性能越好．即 $\forall\ (S,f)$，$|S|=s$，$\forall\ A$，$\forall\ m\in \boldsymbol{N}$，$2\le m\le s$，$\forall\ k\in \boldsymbol{N}$，$\forall\ S$ 的 m 划分类 T_1,T_2，若 $T_1\le T_2$，则 $\forall\ r\in \boldsymbol{R}$，$\min\limits_{P\in T_1}\boldsymbol{Pr}(B_{mk}^P\le r)\le \min\limits_{P\in T_2}\boldsymbol{Pr}(B_{mk}^P\le r)$．

至此，我们证明了在本文定义的划分类均匀性偏序关系下，按照划分类的平均划分性能和最坏划分性能标准，均有相同的结论：划分类越均匀，相应的初始点选择策略性能越好.

4 划分策略的性能估计

本节我们将估计划分策略的性能上下界，从而可以知道划分策略可能比常用策略性能提高的限度.

定理 4. $\forall\ (S,f),|S|=s,\forall\ A,\forall\ m\in \boldsymbol{N},2\le m\le s,\forall\ r\in \boldsymbol{R},|D(r)|=d,\forall\ k\in \boldsymbol{N},\forall\ S$ 的 m 划分类 $T,\boldsymbol{Pr}(B_{mk}^{T}\le r)\le \boldsymbol{Pr}(B_{mk}^{R(m,k)}\le r)=1-\binom{d}{m}^{k}\Big/\binom{s}{m}^{k}$.

推论 4. $\forall\ (S,f),|S|=s,\forall\ A,\forall\ m\in \boldsymbol{N},2\le m\le s,\forall\ r\in \boldsymbol{R},|D(r)|=d,\forall\ k\in \boldsymbol{N},\forall\ S$ 的 m 划分类 $T,\min\limits_{P\in T}\boldsymbol{Pr}(B_{mk}^{P}\le r)\le \boldsymbol{Pr}(B_{mk}^{R(m,k)}\le r)=1-\binom{d}{m}^{k}\Big/\binom{s}{m}^{k}$.

定理 4 及推论 4 告诉我们任意 m 划分类的平均划分性能及最坏划分性能的上界. 这样我们可以知道，如果存在比 R_0 好的划分策略，那么至多能提高多少. 为此我们先讨论是否存在比 R_0 好的划分策略.

定理 5. $\forall\ (S,f),|S|=s,\forall\ A,\forall\ m\in \boldsymbol{N},m$ 整除 $s,\forall\ k\in \boldsymbol{N},\forall\ S$ 的 m 均匀划分 $P=\{S_1,S_2,\cdots,S_m\}$, $|S_i|=\frac{s}{m},1\le i\le m$, 有 $\forall\ r\in \boldsymbol{R},\boldsymbol{Pr}(B_{mk}^{R_0}\le r)\le \boldsymbol{Pr}(B_{mk}^{P}\le r)$.

推论 5. $\forall\ (S,f),|S|=s,\forall\ A,\forall\ m\in \boldsymbol{N},s=qm,\forall\ k\in \boldsymbol{N}$, 设划分类 $T=q^m$, 则 $\forall\ r\in \boldsymbol{R}$,

$$\boldsymbol{Pr}(B_{mk}^{R_0}\le r)\le \boldsymbol{Pr}(B_{mk}^{T}\le r)\le \boldsymbol{Pr}(B_{mk}^{R(m,k)}\le r)$$

$$\boldsymbol{Pr}(B_{mk}^{R_0}\le r)\min_{P\in T}\le \boldsymbol{Pr}(B_{mk}^{P}\le r)\le \boldsymbol{Pr}(B_{mk}^{R(m,k)}\le r)$$

由上可见，任一个均匀划分下的初始点选择策略均优于常用的均匀随机策略 R_0，并进一步保证均匀划分类的性能在平均划分性能和最坏划分性能两种标准下均优于常用策略 R_0. 一般地讲，所有这些性质是非均匀划分或划分类(即使是最大元) 所不具备的，可以构造反例来说明这一点. 在实际问题中，均分搜索空间是容易实现的. 所以我们可以说存在唯一的一种划分策略即均分策略在任一个实例下均优于常用策略 R_0. 由推论 5 我们可以估计这种优势的界限. 由于 R_0 策略与 $R(m,k)$ 策略的区别仅仅在于初始点是否允许重复，而初始点的个数以及划分数相对搜索空间的大小是微不足道的，因此 R_0 策略与 $R(m,k)$ 策略的性能区别微乎其微，因而均分策略对常用策略 R_0 的改进更是微不足道的，而且远不如 $R(m,k)$ 策略简单.

5 结 论

本文针对文献[9]的工作及有关问题做了比较完整深入的探讨，对于不同划分策略的优劣及性能估计给出了明确的回答. 我们认为划分策略的本质仅仅是企图避免初始点可能的重复，而这不是提高初始点策略性能的一条有前途的路. 尽管我们的证明是在离散搜索空间和确定性邻域搜索方式下做出的，我们认为在连续搜索空间和随机性邻域搜索方式下结论是相同的.

那么在初始点选择方面是否还有其它有希望的方法呢？具体地讲，是否存在比均匀随机无放回策略更好的初始点策略呢？我们注意到试验设计的一些方法，但初步研究表明，要做到与实例无关是非常困难的. 这个问题值得深入研究.

参 考 文 献

1 Lin S, Kernighan B W. An effective heuristic algorithm for the traveling-salesman problem. *Operations research*, 1973, 21:498－516

2 Kernighan B W, Lin S. An efficient heuristic procedure for partitioning graphs. *The Bell System Technical Journal*, 1970, 49:291－307

3 Papadimitriou C H, Steiglitz K. Combinatorial Optimization. Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall, 1982

4 Selman B, Kautz H A, Cohen B. Noise strategies for improving local search. In: Proc AAAI-94, Seattle, Washington 1994. 337－343

5 Gu J. Local search for satisfiability (SAT) Problem. *IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics*, 1993, 23(4): 1108－1129

6 黄文奇,金人超.求解SAT问题的拟物拟人算法—Solar. 见:第二届人工智能暑期研讨会论文集,哈尔滨,1996, 1－8

7 Reeves C R. Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems. Oxford: Blackwell Scientific Publications, 1993

8 Yannakakis M. The analysis of local search problems and their heuristics. In: Proc 7th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, 1990. 298－311

9 Wong W S, Morris R J T. A new approach to choosing initial points in local search. *Information Processing Letters*, 1989, 30:67－72

10 Morris R J T, Wong W S. Systematic choice of initial points in local search: extensions and application to neural networks. *Information Processing Letters*, 1991, 39:213－217

11 贺思敏. 可满足性问题的算法设计与分析[博士学位论文]. 清华大学计算机科学与技术系, 北京, 1997