用吴方法求解可满足性问题(Ⅰ)——算法变换

贺思敏 张 钹
(清华大学计算机科学与技术系 北京 100084)
(清华大学智能技术与系统国家重点实验室 北京 100084)

摘 要 本文在算法变换的思想指导下,研究了用吴方法求解可满足性问题的特点.通过建立吴方法的基本操作与子句间有限制的归结操作的对应,证明了吴方法求解可满足性问题基本上是一种以特征列计算为核心的有限制的子句归结过程,不仅使吴方法和归结法相互引入新的概念和认识,而且在算法实现时可以避免复杂的多项式计算,同时可以更好地利用问题特性和已有经验以获得更高的效率.

关键词 算法设计,可满足性问题,吴方法,输入变换,算法变换.
分类号: TP18

SOLVING SATISFIABILITY PROBLEM BY WU'S METHOD (Ⅰ) ——ALGORITHM TRANSFORM

HE Si-Min ZHANG Bo
(*Department of Computer Science and Technology*, *Tsinghua University*, *Beijing* 100084)
(*National Key Laboratory for Intelligent Technology and Systems*, *Tsinghua University*, *Beijing* 100084)

Abstract In this paper, a new approach called algorithm transform is proposed and applied to solving SAT by Wu's method, a general algorithm for solving polynomial equations. By establishing the correspondence between the primitive operation in Wu's method and clause resolution in SAT, it is shown that Wu's method, when used for solving SAT, is primarily a restricted clause resolution procedure. While Wu's method introduces entirely new concepts, e.g. characteristic set of clauses, to resolution procedure, the complexity result of resolution procedure suggests an exponential lower bound to Wu's method when solving general polynomial equations. Moreover, this algorithm transform can help achieve a more efficient implementation of Wu's method since it can avoid the complex manipulation of polynomials and can make the best use of domain specific experience.

Keywords Algorithm design, satisfiability problem, Wu's method, input transform, algorithm transform.

1 研究背景

可满足性问题(Satisfiability problem,以下简称 SAT 问题)是计算机科学、人工智能及其应用的核心问题,

本文1996-05-07收到,修改文1998-05-04收到.本课题得到国家自然科学基金、国家攀登计划和国家863高科技基金资助.贺思敏,男,1968年生,获博士学位,主要研究领域为组合优化问题、局部搜索算法的实验设计与分析.张 钹,男,1935年生,中国科学院院士,教授,博士生导师,主要研究领域为问题求解、人工神经网络等人工智能基础理论.

近几年来有关SAT问题的求解算法成为研究的热点，获得了许多新的结果和认识.

SAT问题来源于自动定理证明，因此自动定理证明的一些方法可以直接用于求解SAT问题.比较著名的有两个算法：一个是DP算法[1,2]，以它为核心发展的各种改进算法是目前完备算法中效率最高的；另一个是归结法[3]，它在一阶谓词逻辑自动定理证明中具有漂亮的性质，自然也可以用于命题逻辑自动定理证明，即用于求解SAT问题，特别是其中的归结操作与SAT问题的各种算法具有深刻联系.

求解SAT问题的另一个思路是变换求解.长期以来，在不同的问题背景和问题形式下发展形成了多种问题求解方法，在各自领域中发挥着巨大作用.变换求解即通过某种变换，利用其它领域中比较有效的问题求解方法和策略实现间接求解.变换求解不仅提供了更为广阔的解题思路，而且有助于揭示各种问题及其求解方法之间的内在联系，从多个角度认识问题的本质.目前研究较多的SAT问题的变换求解方法与以下四类问题求解方法有关：人工智能界研究较为深入的约束满足问题(Constraint satisfaction problem)求解方法，运筹学界的经典成果线性规划(Linear programming)和整数规划(Integer programming)方法，成功求解旅行商问题(Travelling salesman problem)的局部搜索(Local search)方法，以及应用数学界广为研究的最优化(Optimization)方法或称非线性规划(Nonlinear programming)方法.本文则进一步探索用多项式方程组求解方法求解SAT问题的可行性.

变换求解最常用的方法是输入变换，即把原问题的输入“编码”成为新问题形式下的输入，然后调用新问题形式下已有的算法计算，最后将计算的最终结果“解码”为原问题的解答.尽管两种问题形式下的输入和输出分别对应，但是中间计算过程没有对应，即新问题形式下的计算过程相当于一个“黑箱”，无法用原问题形式下的概念和操作予以表达.

变换求解的另一种方法是算法变换，即把新问题形式下的方法通过某种办法用原问题形式下的概念和操作予以重新表述，从而利用新问题形式下的方法和策略形成原问题形式下的求解方法.

算法变换与输入变换相比，其优越性是明显的.输入变换往往使新形式下的输入变得非常庞大，而且无法完全而简洁地表达原问题的许多特性，计算效率会受到影响；输入变换无法有机结合多种求解方法求解同一问题，因为求解方法一般依赖各自不同的问题表示；输入变换也不利于揭示不同问题以及不同求解方法之间的内在联系.算法变换则在原问题形式下表达各种问题求解策略，不仅可以充分利用原问题的特性，而且可以有机结合、合理裁剪各种问题求解策略形成更有效的方法，这是非常重要的优点，因为目前看来任何单一方法无法有效求解SAT问题.此外，算法变换还可以帮助我们认识不同问题以及不同求解方法之间的内在联系.因此，我们在研究变换求解方法时，更要重视算法变换.

算法变换的实现通常是借助抽象，即把新问题形式下的方法抽象后表达成一种不依赖该问题表示形式的策略，然后将此策略用原问题形式下的语言予以具体化，从而形成求解原问题的新方法.例如，局部搜索原本用于求解旅行商问题，但将局部搜索抽象成一种不依赖具体搜索空间结构的策略后则可以直接用于SAT问题求解，目前局部搜索方法是求解SAT问题的不完备算法中效率最高的；而如果把SAT问题形式下的实例转化为旅行商问题的一个实例后再用局部搜索求解则将是非常复杂的.另一个典型例子是约束满足问题求解方法中的一个重要概念“强k一致性(Strong k-consistency)”，由于其表达不依赖约束满足问题常用的二元约束表示，因而可以马上应用到SAT问题中，用SAT问题语言刻画“强k一致性”即“子句集在有界$(k-1)$归结($(k-1)$-bounded resolution，即归结式长度不超$(k-1)$的归结)运算下封闭后不出现矛盾”.我们常用有界2归结、有界3归结做预处理或DP算法中的节点操作.

但是算法变换并不都可以靠抽象来实现，因为许多问题求解方法对输入表示依赖较重，仅靠抽象无法完整把握求解方法的实质.本文给出了一个通过输入变换建立基本操作对应从而实现算法变换的例子.

本文在算法变换的思想指导下，探索了用吴方法求解SAT问题的新思路.吴方法是一种求解多项式方程组的通用算法，它在平面几何定理机器证明中取得的巨大成功引起了人们对吴方法的广泛关注.一个自然的想法是：能否用吴方法求解SAT问题呢?本文详细介绍用吴方法求解SAT问题的各个主要环节，同时以此为例阐述算法变换的思想、方法、特点.关于吴方法的介绍请参见文献[4,5].本文定理的证明请参见文献[6].关于吴方法求解SAT问题的详细实验结果将另文发表，也可参见文献[6].

2 用吴方法求解SAT问题

2.1 输入变换

用吴方法求解SAT问题,输入变换是最自然的思路.这就要设法将SAT问题原形式下的输入转化为多项式表示,并在两种形式下的解之间建立对应.

SAT问题一般指合取范式(Conjunctive normal form)可满足性问题,其一般表述为:

给定n个布尔变元$x_1,x_2,\cdots,x_n$,x_i或$\bar{x}_i$称为变元x_i对应的文字,记为$\tilde{x}_i$,x_i和$\bar{x}_i$称为关于变元x_i的互补文字,$i=1,2,\cdots,n$;给定m个子句$C_1,C_2,\cdots,C_m$,其中$C_j=\tilde{x}_{j_1}\vee\tilde{x}_{j_2}\vee\cdots\vee\tilde{x}_{j_{k_j}}$,$k_j$为子句$C_j$中的文字个数,$C_j$中各文字分别对应不同变元,$j=1,2,\cdots,m$.问:是否存在$x_1,x_2,\cdots,x_n$的一组0,1赋值,使子句集$\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$中的每个子句在此赋值下为真,即子句集$\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$可满足?

1985年Kapur等[7]提出用基于Groebner基的方法进行一阶谓词逻辑自动定理证明,其中自然要讨论命题逻辑自动定理证明,实质上相当于求解SAT问题.Groebner基的方法是一种不同于吴方法的求解多项式方程组的方法,但同样要求先把命题逻辑合式公式变成某种多项式,即进行输入变换.文献[7]的方法是把任一合式公式(子句形或非子句形)用布尔连接词“异或”和“与”以及常量0和1表出,然后把“异或”看成“+”,把“与”看成“×”,从而将合式公式表示成布尔环$B=(\{0,1\},+,\times)$上满足$x_i^2=x_i$,$i=1,2,\cdots,n$的多项式环$B[x_1,x_2,\cdots,x_n]$中的多项式,然后建立解的对应,完成输入变换.虽然文献[7]是用基于Groebner基的方法进行求解与证明的,但同样的输入变换下也可以用吴方法求解.

1992年白硕[8]受吴方法启示,探讨了一类有关“知道”的逻辑问题用代数方程表达与求解的可能性,同时给出了一种把SAT问题化为多项式方程组求解的输入变换方法.文献[8]注意到了文献[7]的工作,但认为把方程定义在布尔环或模2的有限域上,而不是定义在有理域或实闭域上就不容易利用求解有理域或实闭域上多项式方程组的成熟方法,因此,文献[8]把SAT问题转化为有理域或实闭域上的多项式方程组求解问题,但是没有进一步讨论有关方程组求解等问题.具体的输入变换是从子句形式出发,定义转换规则Ψ如下:

(1) $\Psi(\tilde{x}_i)=\begin{cases}1-x_i, & \text{如果 } \tilde{x}_i=x_i\\ x_i, & \text{如果 } \tilde{x}_i=\bar{x}_i;\end{cases}$

(2) $\Psi(\tilde{x}_{j_1}\vee\tilde{x}_{j_2}\vee\cdots\vee\tilde{x}_{j_{k_j}})=\Psi(\tilde{x}_{j_1})\cdot\Psi(\tilde{x}_{j_2})\cdots\Psi(\tilde{x}_{j_{k_j}})$;

(3) 子句集$\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$对应标准方程组$\{\Psi(C_j)=0,\ j=1,2,\cdots,m\}$.

两种形式下的解的对应很简单,表述为:

引理1[8]. 子句集$\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$可满足的充要条件是它的标准方程组$\{\Psi(C_j)=0,\ j=1,2,\cdots,m\}$有使未知量取值全为0或1的解.

那么,本文采取什么样的输入变换呢?

首先,我们从子句形出发而不是从一般合式公式出发给出输入变换.这不仅是因为子句形式不失一般性,也是通常讨论的形式,更重要的是子句对应的多项式的计算将非常简单,并使我们能够获得一些关于吴方法求解SAT问题的重要认识.2.2,2.3节将详细讨论这一问题.

其次,从子句形出发,使用文献[8]提出的输入变换比较自然,但是其中缺一组重要的约束方程$x_i(1-x_i)=0$,即$x_i^2=x_i$,$i=1,2,\cdots,n$.这一组约束方程的加入不仅自然地将解限制在0,1上,使引理1不必再判断方程组的解是否具有0,1形式从而更加简洁,更重要的是这一组约束方程具有重要的化简作用,可以避免多项式的计算结果产生任一变元幂次超过一次的项,对算法的有效实现非常重要.2.2,2.3节将进一步对此进行解释.

第三,用吴方法求解SAT问题主要是利用吴方法求解多项式方程组,只用到弱形式的零点定理,这只要求把多项式定义在数域上即可,因此把多项式定义在有理数域或整数模2的有限域$\mathbf{Z}_2$上均可,不影响本文其余部分的讨论.鉴于SAT问题变元为布尔变元的特点,将多项式定义在$\mathbf{Z}_2$上有时会方便一些.但不论定义在什么数域上,约束方程$x_i(1-x_i)=0$,$i=1,2,\cdots,n$均是必不可少的.

因此,本文采取如下的输入变换方法f:

(1) $f(1)=0$, $f(0)=1$;

(2) $f(\tilde{x}_i)=\begin{cases}1-x_i, & \text{如果 } \tilde{x}_i=x_i\\ x_i, & \text{如果 } \tilde{x}_i=\bar{x}_i;\end{cases}$

(3) $f(\tilde{x}_{j_1}\vee\tilde{x}_{j_2}\vee\cdots\vee\tilde{x}_{j_{k_j}})=f(\tilde{x}_{j_1})\cdot f(\tilde{x}_{j_2})\cdots f(\tilde{x}_{j_{k_j}})$;

(4) 子句集$\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$对应的方程组为

$$\begin{cases}f(C_j)=0, & j=1,2,\cdots,m\\ x_i(1-x_i)=0, & i=1,2,\cdots,n\end{cases}\tag{1}$$

其中 $f(C_j)$ 称为子句多项式,$x_i(1-x_i)$ 称为约束多项式.

定理 1. 子句集$\{C_1,C_2,\cdots,C_m\}$的可满足赋值与相应方程组(Ⅰ)的解一一对应.

到此为止,输入变换就完成了.这时完全可以把吴方法作为一个黑箱来调用进行求解,只等最终结果即可.这是通常的想法.本文特点是通过输入变换完成算法变换,以便更深入地认识吴方法求解 SAT 问题的特点和有效地把吴方法与 SAT 问题特性及已有求解经验相结合以求得更好的效率.本文其余部分将深入讨论这些问题.

2.2 算法变换

算法变换能否实现关键是两种问题形式下的基本操作是否存在对应,因此,我们着重研究吴方法求解 SAT 问题时其基本操作多项式间的求余运算有什么新的特点.

定理2. 给定子句 C_1,C_2,相应多项式为 $f(C_1)$,$f(C_2)$,$f(C_2)$ 的主变元是 x_i.把约束方程 $x_k(1-x_k)=0$,$k=1,2,\cdots,n$ 作为化简条件,则 $f(C_1)$ 对 $f(C_2)$ 求余所得余式 $Rem(f(C_1)/f(C_2))$ 有以下 4 种情况:

(1) C_1 中不含变元 x_i 的文字,则

$$Rem(f(C_1)/f(C_2))=f(C_1).$$

(2) C_1 中含变元 x_i 的文字,但与 C_2 中所含 x_i 的文字相同,则

$$Rem(f(C_1)/f(C_2))=0.$$

(3) C_1 与 C_2 含有关于 x_i 的互补文字,还含有关于其它变元的互补文字,则

$$Rem(f(C_1)/f(C_2))=0.$$

(4) C_1 与 C_2 含有关于 x_i 的互补文字,但不含有关于其它变元的互补文字,则

$$Rem(f(C_1)/f(C_2))=f(Res(C_1,C_2,x_i)).$$

其中 $Res(C_1,C_2,x_i)$ 是子句 C_1,C_2 关于变元 x_i 的归结式.

由定理 2 可知,吴方法求解 SAT 问题时,其基本操作子句多项式间的求余运算之结果仍保持着子句形式,而且前 3 种情况下余式并不代表一个具有新信息的子句,我们称之为平凡的,只有第 4 种情况下余式才对应一个新子句,而且正是两个子句的归结式.因此,吴方法在求解 SAT 问题的整个计算过程中将均是对子句多项式进行运算,而且这种运算对应着子句间一种有限制的归结,其限制性表现在仅对某一子句的主变元进行归结,而不是凡有互补文字就进行归结.

这样,吴方法求解 SAT 问题的过程可以在 SAT 问题的子句表示形式下用子句及其归结操作重新表述,而不必再使用多项式的语言了,在子句多项式形式下定义的概念和运算等均可以直接定义在子句上,例如子句的主变元、子句的初式、子句的升列、子句的特征列、子句间的求余运算等等,本文也将不再严格区分子句和子句多项式.这给 SAT 问题的求解带来了全新的概念和方法.

用子句及其归结操作表示吴方法求解 SAT 问题的整个计算过程不仅仅便于理解,而且在实现算法时具有不可替代的优点.子句的表示非常整齐简单,用长度等于变元数、元素为 0,1,-1(分别表示相应变元在子句中不出现,以正文字出现,以负文字出现)的一维数组即可统一表示,进行求余运算或说归结也非常简单.而如果用多项式展开表示子句多项式并进行运算则要复杂得多,效率自然会很差,而实现效率将严重影响对方法的评价.

借助输入变换和定理 1,2 基本上实现了算法变换,下面我们进一步讨论求解 SAT 问题时吴方法与归结法的联系与区别.这里特别指出一点:本文所说的归结法是指命题逻辑自动定理证明中的归结法,而不是指一阶谓词逻辑自动定理证明中的归结法,前者是后者的特例,二者具有密切联系,但又有很大区别.关于吴方法

用于一阶谓词逻辑自动定理证明的研究请参见文献[9].

归结法在实现中具有较大的不确定性，即使增加各种控制策略如单元子句优先、支持集策略等之后仍然具有较大盲目性，归结过程产生大量对于最终证明没有任何意义的子句，极大地影响了归结法的效率. 吴方法在子句形式下的计算不仅仅是一种有限制的归结，吴方法的根本特点在于整个计算过程是围绕特征列的计算展开的，归结操作具有较强的目的性，是一种全新的归结法，与以往的归结法具有根本的不同. 特别是对于可满足实例，吴方法一旦计算出某个特征列的使其初式不为 0 的零点存在时，就可以给出一个解从而判定实例可满足而停止计算，不必计算出所有的解；而归结法则必须进行到不能归结出不被已有子句包容的新子句时才可以判定有解而停止计算，这时相当于已将所有的解均明确地表示出来了. 根据另文发表的两种方法详细的实验数据，无论实例有解还是无解，吴方法均比归结法效率高得多[6].

另一方面，1985 年 Haken[10] 证明了对于鸽巢问题(Pigeonhole problem)，任一归结证明至少包含指数多个不同的子句，这就给出了归结法求解 SAT 问题的一个指数型下界. 吴方法求解 SAT 问题基本上是一个归结过程，特别是对于不可满足实例，只有归结操作(定理 2 情况 4)才有助于导出矛盾，因此吴方法求解SAT 问题最坏情况下可能受到同样的限制. 而且，文献[10]的结论和定理 1,2 一起有可能给出吴方法求解一般多项式方程组的一个指数复杂性下界，而一般的复杂性结果多是某种指数型上界，一个非平凡的下界并不容易获得，因此这个结果是有意义的. 这里我们不对这一命题严格陈述与证明，因为吴方法计算中的问题分解过程需要 专门处理，尽管这一过程不大可能对复杂性产生根本影响. 我们只想说明：通过算法变换，我们对吴方法求解 SAT 问题以及吴方法本身有了更为深刻的认识，而这些认识在输入变换下是无法获得的.

定理 2 的证明过程中可以明显看到约束方程 $x_i(1-x_i)=0, i=1,2,\cdots,n$ 的化简作用. 在吴方法求解 SAT 问题的整个计算过程中，约束多项式 $x_i(1-x_i), i=1,2,\cdots,n$ 并不直接进行求余运算，而是隐含在子句多项式的求余运算中起化简作用，用子句语言表述，其作用一是消去重言式(情况 3)，二是消去重复文字(情况 4)，使余式始终保持简单的子句形式，这样可以提高吴方法在 SAT 问题上的计算效率. 这里充分利用了 SAT 问题的特点，2.3 节还将进一步说明这一点.

吴方法求解 SAT 问题尽管可以在子句形式下表述和实现，但是，吴方法是一种全新的归结法，具有以往各种归结策略所完全没有的特点，因此，整个计算过程仍按吴方法的一般步骤展开. 下面我们讨论在特征列计算、问题分解和变元定序几个重要环节上如何充分利用 SAT 问题特点，这是算法变换更为重要的目的和优点所在.

2.3　特征列计算

特征列的计算是吴方法的核心，自然也是吴方法求解 SAT 问题的核心. 下面我们将对特征列的具体计算过程、特征列的形式、特征列使其初式不为 0 的零点集的判定等问题进行讨论.

特征列的计算采用深度优先策略[5]，即任一多项式对基列求余得到非 0 余式后马上对基列进行修改，而不是等到所有多项式对当前基列求余完成之后再修改基列. 后者称为宽度优先策略，一般比深度优先策略效率差. 根据 SAT 问题的特点，我们对具体计算过程做了进一步的改进：

在我们定义的输入变换下，要求解的多项式方程组(Ⅰ)包含两类多项式，一类是子句多项式 $f(C_j), j=1,2,\cdots,m$，另一类是约束多项式 $x_i(1-x_i), i=1,2,\cdots,n$. 在计算多项式组 $PS=\{f(C_j)\mid j=1,2,\cdots,m\}\cup\{x_i(1-x_i)\mid i=1,2,\cdots,n\}$ 的特征列时，我们仅仅处理子句多项式 $f(C_j)$，而且是按照定理 2 计算余式；而对约束多项式 $x_i(1-x_i)$ 不做这种显式处理，而是作为化简条件隐含在定理 2 中. 最后若没产生矛盾，则得到一组子句多项式构成的升列 $AS=\{f(C'_k), k=1,2,\cdots,r\}$(其中 $1\le r\le n$)，使得 PS 中任一子句多项式 $f(C_j)$，$j=1,2,\cdots,m$ 对升列 AS 按定理 2 求余余式为 0. 令

$$CS=AS\cup\{x_t(1-x_t)\mid 1\le t\le n, \text{且 } x_t \text{ 不是 } AS \text{ 中任一个多项式的主变元}\}$$

重新排序后有 $CS=\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$，其中 P_i 的主变元为 x_i.

定理 3.　上述计算过程必定终止. 若产生矛盾，则多项式方程组 $PS=0$ 无解；否则，CS 是 PS 的特征列.

我们仅仅处理子句多项式 $f(C_j)$，而且是按照定理 2 计算余式；对约束多项式 $x_i(1-x_i)$ 不做这种显式处理，而是作为化简条件隐含在定理 2 中，这样子句多项式间的求余运算将具有定理 2 所示的简单结果形式，而不会产生某一变元幂次超过一次的余式，不仅简化了计算过程，而且使我们看到了吴方法求解 SAT 问题与归

结法的某种联系.定理 3 则保证了这样处理不失吴方法原来意义下的严格性.

关于特征列使其初式不为 0 的零点集的判定有下面的简单定理.

定理 4. 设 CS 是 PS 的特征列,I 是 CS 中各多项式的初式的乘积,则 $Zero(CS/I) \neq \varnothing$ 当且仅当 CS 中各子句多项式的初式对应的子句间不含关于任一变元的互补文字.$Zero(CS/I) \neq \varnothing$ 时,$Zero(CS/I)$ 中的零点可以这样确定:CS 中各子句多项式的主变元对应的子句文字为 1(真),各子句多项式的初式对应的子句的各文字为 0(假),其余变元取值任意.

我们称某一变元为冲突变元,如果特征列各子句多项式的初式对应的子句间含有关于此变元的互补文字.这样,特征列使其初式不为 0 的零点集的判定可以简单表述为:$Zero(CS/I) \neq \varnothing$ 当且仅当特征列的初式中不存在冲突变元.

我们之所以从子句形而非一般合式公式出发对 SAT 问题进行输入变换及应用吴方法求解,正是因为从一般合式公式出发无法有效利用 SAT 问题特点,不仅难于建立吴方法与归结法的联系,进而无法通过吴方法与归结法的比较来更深入地认识吴方法,而且其计算过程将基本上成为一般多项式的计算从而复杂化,最后求出特征列也难于象定理 4 那样简单地判定特征列使其初式不为 0 的零点是否存在.

特征列是吴方法的精华.尽管吴方法求解 SAT 问题时与归结法有一定联系,但是特征列的概念是吴方法所独有的,这使吴方法成为求解 SAT 问题的一种全新的方法.我们不仅可以按吴方法那样以特征列为中心组织计算,而且可以把特征列计算作为一个子过程嵌入其它算法,使吴方法的成果可以被更好地利用.

2.4 问题分解

如果特征列的计算没有产生矛盾,但是 $Zero(CS/I) = \varnothing$,其中 $I = I_1 \cdot I_2 \cdots I_n, I_i, i = 1,2,\cdots,n$ 是 CS 中各多项式的初式(实际上只有其中的子句多项式的初式有用,约束多项式的初式均为 1),即 CS 的初式中有冲突变元,那末依照零点定理,就要进一步分别求解多项式组 $\{PS, I_i\}, i = 1,2,\cdots,n$.

由于 SAT 问题存在按变元分别取值 0 或 1 的自然分解过程,而且单元子句的加入要比长子句的加入有更好的计算效率,因此我们利用这个特点,选择某一变元 x_i,将多项式组 PS 分解为 $\{PS, x_i\}$ 和 $\{PS, 1-x_i\}$ 后分别用吴方法继续求解.在 SAT 问题算法研究中,这一过程称为分支过程,变元 x_i 称为分支变元.在选择分支变元时,我们利用当前特征列的信息,选择 CS 的初式中的冲突变元作为分支变元,目的是尽可能消除或减少新的特征列的初式中出现冲突变元的可能性.当然这也只是一个启发性规则.当有多个冲突变元可选时,有一个选较高序变元还是选较低序变元的选择,分别称为"高冲突变元优先分支"和"低冲突变元优先分支".我们对这两种分支策略均进行了实验[6].

问题分解使吴方法求解 SAT 问题的过程可以表示成一棵搜索树,其中每个节点代表一个特征列的计算;叶子节点代表特征列计算发现矛盾,或者特征列使其初式不为 0 的零点存在;非叶子节点代表特征列计算没有发现矛盾,但是特征列使其初式不为 0 的零点不存在(即特征列的初式中存在冲突变元).

2.5 变元定序

吴方法求解 SAT 问题时,输入变换之后首先要进行变元定序,然后才能开始特征列计算及问题分解等.变元定序对吴方法的效率影响相当大,但是缺乏一般规则,只能根据问题特点启发式地予以确定.在 SAT 问题的各种算法中也常常涉及对变元排序的问题,一般以变元的约束强弱来排序,而变元的约束强弱也只能启发式地度量.在通常用作实验模型的随机 3-SAT 实例模型下,用变元以正文字出现的子句数和以负文字出现的子句数之乘积作为变元约束强弱的度量效果较好,乘积越大,约束越强.这样,我们可以获得两种变元序:约束越强,变元序越高,称为"强约束变元高序";约束越强,变元序越低,称为"强约束变元低序".此外,为了进一步检验这两种变元序是否对求解效率有显著影响,我们可以用"随机序"即随机产生的一个变元序作为对比.我们对这 3 种变元序均进行了实验[6].

3 结 论

本文在算法变换的思想指导下,研究了吴方法求解 SAT 问题的特点.对于 SAT 问题求解,吴方法既与归结法密切相关,又提供了实质上不同的方法,而且今后吴方法的任何进展都可能对 SAT 问题求解产生进一步

的有益影响和启发.同时,求解类似SAT这类已有一些解法的问题对于拓广吴方法的研究和应用领域也有积极作用.

本文对吴方法求解SAT问题的研究也是为了说明本文提出的算法变换的思想.本文作者认为,虽然变换求解可以开阔解题思路,但是只有算法变换才能真正提高问题求解的效率和认识问题的深度.目前,在各种组合优化问题形式下已经发展了大量求解方法,但还没有广泛地应用算法变换的思想去认识、去发展、去统一这些方法.我们相信,算法变换的思想可以大有作为.

参考文献

1 Davis M, Putnam H. A computing procedure for quantification theory. *J ACM*, 1960, 7:201－215

2 Davis M, Logemann G, Loveland D. A machine program for theorem proving. *Communications of the ACM*, 1962, 5: 394－397

3 Robinson J A. A machine-oriented logic based on the resolution principle. *J ACM*, 1965, 12(1): 23－41

4 吴文俊.几何定理机器证明的基本原理(初等几何部分).北京:科学出版社,1984

5 Kapur D, Lakshman Y N. Elimination theory: an introduction. In: Donald B R *et al* eds. Symbolic and Numerical Computation for Artificial Intelligence. New York: Academic Press, 1992

6 贺思敏.可满足性问题的算法设计与分析[博士学位论文].清华大学计算机科学与技术系,北京,1997

7 Kapur D, Narendran P. An equational approach to theorem proving in first-order predicate calculus. In: Proc 10th International Joint Conference on Artificial Intelligence, Los Angeles, California, 1985. 1146－1153

8 白　硕.有关"知道"的逻辑问题的代数方程表达初探.见:第二届中国人工智能联合学术会议论文集,杭州,1992. 267－272

9 吴尽昭,刘卓军.一阶谓词演算定理机器证明的余式方法.计算机学报,1996,19(10):728－734

10 Haken A. The intractability of resolution. *Theoretical Computer Science*, 1985, 39:297－308